树的模染色数

广东实验中学
王家林　源洁莹

摘要：图的模染色及模染色数的概念是由 F. Okamoto, E. Salehi 和 P. Zhang 于 2010 年提出。他们同时证明了树的模染色数为 2 或者 3。本文给出树的模染色数等于 3 的一个充分必要条件。

关键词：树、模染色、模染色数

一、简介

本文中的所有没有给出定义的图论的基本概念、术语及记号均依照 D. West 的图论教材[3]。

图的染色是图论的一个重要的研究领域。平面图的四色猜想是图论中最著名并且对图论的发展起到重要推动作用的问题之一。四色猜想于 1977 年被 Appel,Haken 和 Koch 通过计算机的帮助得到了证明。1996 年，Robertson, Sanders, Seymour 和 Thomas 给出了一个简化的证明，但证明仍需要计算机。除了经典的染色的概念之外，很多学者还提出了各种新的染色的概念。如列表染色(见[3]第 8.4 节)，分数染色(见[4]第 7 章)等。

2010 年，F. Okamoto, E. Salehi 和 P. Zhang 在[1]文中提出了模染色的概念。设 G=(V,E) 为简单无向图。对正整数 k，设 c: V → {0,1, … ,k-1} 为 G 的顶点集上的一个映射。给定一个映射 c，对每个顶点 v，令 $\sigma(v)=\sum_{u\in N(v)} c(u) \pmod k$。若 σ 满足对 G 的任意一对相邻的顶点 x 和 y，有 $\sigma(x)\neq\sigma(y)$，则称 c 是 G 是一个**模 k 染色**。若 k 是最小的正整数，使得 G 存在一个模 k 染色，则称 k 为 G 的**模染色数**，记为 mc(G)=k。

文[1]得到了一些简单图类的模染色数，如对于 n 阶路 P_n，$mc(P_n)=2$。设 C_n 是 n 阶的圈，则若 n=0 (mod 4)时，$mc(C_n)=2$；其他情形都有 $mc(C_n)=3$。对于网格图 M(即路与路的笛卡尔乘积图)，[2]文证明了 mc(M)=2。

对于树，[1]文证明了树的模染色数为 2 或者 3。证明方法是对任意树给出了一个模 3 染色。也就是说，这个证明不能判断一棵树的染色数是 2 还是 3。

本文研究树的模染色数，给出了树的模染色数等于 3 的一个充分必要的刻画。在叙述这个结果之前，我们需要一些定义。

我们称 5 阶的路为 **W 图**。设 (X, Y) 是 W 图的一个二部划分，使得|X|=3。称 X 中的顶点为**大顶点**，Y 中的顶点为**小顶点**。

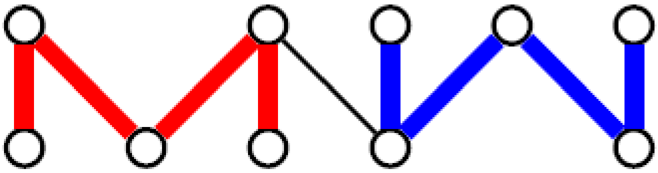
W 树由 W 图通过图的粘贴操作递归地定义。W 图是一个 W 树。设 T_1 和 T_2 都是 W 树，那么 T_1 和 T_2 通过一个大顶点粘贴得到的树 T 也是 W 树。T_1 和 T_2 的大(小)顶点仍是 T 的大(小)顶点。

显然，W 树有奇数个大顶点，且小顶点的度数总是 2。

用 N[X] 来表示一个顶点集 X 的闭领域。

设 T 是以(A,B)为二部划分的树。若存在 A 的子集 X 使得 N[X]的导出子图是一棵 W 树，且 X 为该 W 树的大顶点，则称 T 有**关于 A 的导出 W 树**。若 T 既有关于关于 A 的 W 树，又有关于 B 的 W 树，则称 T 是 **WM 树。**

最小的 WM 树的阶为 10，且在同构意义下，10 阶的 W 树是唯一的，如下图所示：



本文主要证明以下结果。

定理一. 设树 T 以(A,B)为二部划分，则 mc(T)=3 当且仅当 T 是 WM 树。

二、定理一的证明

先证充分性，即若 T 是 WM 树，则 mc(T)=3。用反证法。反设 mc(T)=2，且 c 是 T 的一个模 2 染色。首先假设对任意 A 中顶点 a，有 $\sigma(a)=1$ 因为 T 是 WM 树，所以 T 有关于 A 的导出 W 树。设这个 W 树的二部划分为(X,Y)，且 X 是 A 的子集，为大顶点集。那么我们有

$$1=|X| = \sum_{x\in X}\sigma(x)=\sum_{y\in Y}2c(y)=0(\mathrm{mod}\,2),$$

矛盾！若对任意 A 中顶点 a，有 $\sigma(a)=0$，则对 T 的关于 B 的导出 W 树用同样的推理导致矛盾。

下面证必要性。这等价于证明若 T 不是 WM 树，则 mc(T)=2。不失一般性，我们可以假设 T 不含关于 A 的导出 W 树。我们将证明下面更强的结论。

断言一. 设 T 以 (A,B)为二部划分，没有关于 A 的导出 W 树，则 T 存在一个模 2 染色，使得对 A 中的顶点 a，有 $\sigma(a)=1$ 。

不失一般性，在以下证明中，所有模 2 染色 c（或 c_i，c'）都满足对 A（或 A_i，A'）中的顶点 a，有 c(a)=0（或 $c_i(a)=0$, c'(a)=0）。

对阶小于 5 的树 T，显然没有关于 A 的导出 W 树，此时容易验证 T 存在满足断言一的模 2 染色。所以下面假设 T 的阶大于等于 5。

情形 1，B 中有叶子。设 b_0 为 B 中的一片叶子。顶点 a_0 是 b_0 的唯一邻点。设 $T_1,T_2,...,T_k$ 为 $T - a_0 - b_0$ 的所有连通分支。且设 T_i 的二部划分为(A_i,B_i)，其中 A_i 是 A 和 V(T)的交集。那么对任意 i，T_i 没有关于 A 的导出 W 树。否则 T_i 的关于 A 的导出 W 树也是 T 的关于 A 的导出 W 树，与条件矛盾。由归纳假设，T_i 存在模 2 染色 c_i，使得对 A_i 中的顶点 a，有 $\sigma_i(a)=1$。设 b_i 是 a_0 在 T_i 中的唯一邻点，那么我们定义 T 的一个模 2 染色如下：

$$c(v)=\begin{cases} c_i(v), v\in V(T_i) \\ 0, v=a_0 \\ 1-\sum_1^k c(b_i) (\mathrm{mod}\ 2), v=b_0 \end{cases}$$

容易验证，如上定义的 c 的确是 T 的满足要求的一个模 2 染色。

情形 2，所有叶子都在 A 中。

情形 2.1，A 中存在叶子 a_0，满足 a_0 的唯一邻点 b_0 的度至少是 3。设 T'_1, T'_2, … T'_k 是 $T - a_0 - b_0$ 的所有连通分支。令 T_i 是图 T 的由 $V(T'_i)\cup\{a_{0,} b_0\}$ 导出的子图。那么有自然的二部划分(A_i,B_i) 使得 $A_i=A\cap V(T_i)$。类似于情形 1，每个 T_i 都没有关于 A_i 的导出 W 树。于是由归纳假设，每个 T_i 存在一个模 2 染色 c_i，使得对 A_i 中的点 a，有 $\sigma_i(a)=1$。因为 a_0 在每个 T_i 中是叶子，所以 $c_i(b_0)=\sigma_i(a_0)=1$。所以如下定义的 T 的模 2 染色是合理的，且满足断言一的要求。

$$c(v)=\begin{cases} c_i(v), v\in B \\ 0, v\in A \end{cases}$$

下面假设 A 的每片叶子的唯一邻点的度都是 2。我们有如下断言。

断言二. 设树 T 以(A, B)为二部划分，且所有叶子都在 A 中。若每片叶子的唯一邻点的度都是 2，则以下两个条件总有一个成立。

(1) 存在两片叶子 a_1 和 a_2 使得它们在 T 中的距离是 4。

(2) 存在一片叶子 a_1，它的第二邻点的度也是 2。

断言二的证明. 设 a_0 和 a_1 是 T 的一对叶子，且在 T 的所有叶子对里面，a_0 和 a_1 的距离是最远的。

考虑 a_1 的第二邻点，记为 a_3。若 a_3 的度也是 2，则条件(2)满足。若 a_3 的度大于 2，设 T_0 是 T－a_3 的一个既不含 a_0 也不含 a_1 的分支。那么 T_0 存在一片叶子 a_2 同时也是 T 的叶子。于是在 T 中，a_2 到 a_3 的距离一定是 2，否则 a_0 和 a_2 的距离就比 a_0 和 a_1 的距离大，这和 a_0 与 a_1 的选取矛盾。因此，a_1 和 a_2 是一对满足条件(1)的叶子。 █

情形 2.2，A 中存在两片叶子 a_1 和 a_2，在 T 中距离为 4。设 b_1 和 b_2 分别是 a_1 和 a_2 的唯一邻点。顶点 a_3 是 a_1 和 a_2 的唯一的公共第二邻点。令 $T'=T-\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ 。且 T’的二部划分(A’,B’)满足 $A'=A\cap V(T')$ 。那么 T’没有关于 A’的导出 W 树。事实上，若 U 是 T’的关于 A’的导出 W 树。要么 U 不含顶点 a_3，那么 U 也是 T 的关于 A 的导出 W 树。要么 U 含顶点 a_3，那么由 $V(U)\cup\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ 导出的子图也是 T 的关于 A 的导出 W 树。两者都导致矛盾。因此，T’没有关于 A’的导出 W 树，由归纳假设，T’有模 2 染色 c’，且对 A’中的顶点 a，有 $\sigma'(a)=1$ 。定义 T 的染色如下：

$$c(v)=\begin{cases} c'(v), v\in T' \\ 0, v\in\{a_1, a_2\} \\ 1, v\in\{b_1, b_2\} \end{cases}$$

容易验证，c 是 T 的模 2 染色，且对 A 中的顶点 a，有 $\sigma(a)=1$ 。

情形 2.3，A 中存在叶子 a_1，其第二邻点的度也是 2。设 b_1 和 a_2 分别是 a_1 的邻点和第二邻点。因为第二邻点的度也是 2，设 b_2 是 a_2 的另外一个邻点(已知 b_1 是 a_2 的一个邻点)。

如果 d(b_2)=2，令 $T'=T-\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ ，且 T 的二部划分(A’,B’)满足 $A'=A\cap V(T')$ 。
用类似于情形 2.2 的推理，同样可以证明 T'不含关于 A'的导出 W 树。由归纳假设，T’有模 2 染色 c’，且对 A’中的顶点 a，有 $\sigma'(a)=1$ 。定义 T 的染色如下：

$$c(v)=\begin{cases} c'(v), v\in T' \\ 0, v\in\{a_1, a_2, b_2\} \\ 1, v=b_1 \end{cases}$$

则 c 是满足要求的模 2 染色。

如果 d(b_2)>2，设 T'_1, T'_2, . . . ，T'_k(k>1)是 $T-\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ 的所有连通分支。令 T_i 是由 $V(T'_i)\cup\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ 在 T 中导出的子图。设 T_i 以(A_i, B_i)为二部划分，其中 $A_i=A\cap V(T_i)$ 。显然每个 T_i 都不含关于 A_i 的导出 W 树。由归纳假设，T_i 存在模 2 染色 c_i，使得对 A_i 中的顶点 a，有 $\sigma_i(a)=1$ 。由于 a_1 是叶子, a_2, b_1 和 b_2 在 T_i 中的度都是 2，所以有 $c_i(b_1)=1$ 且 $c_i(b_2)=0$。于是下面的关于 T 的染色的定义是合理的，并且满足断言一的要求。

$$c(v)=\begin{cases} c_i(v), v\in B_i \\ 0, v\in A \end{cases}$$

综上所述，我们证明了断言一。 █

参考文献

[1] F. Okamoto, E. Salehi and P. Zhang, A Checkerboard Problem and Modular Colorings of Graphs. *Bulletin of the ICA*, **58** (2010), 29-47.

[2] F. Okamoto, E. Salehi and P. Zhang, A Solution to the Checkerboard Problem. *International Journal of Computational and Applied Mathematics*, **5(2)** (2010), 447-458.

[3] D. West 著, 李建中, 骆吉洲 译, 《图论导引》 Introduction to Graph Theory (2nd Edition) . 机械工业出版社, 2006

[4] C. Godsil, G. Royle, Algebraic Graph Theory 《代数图论》. 世界图书出版公司, 2004